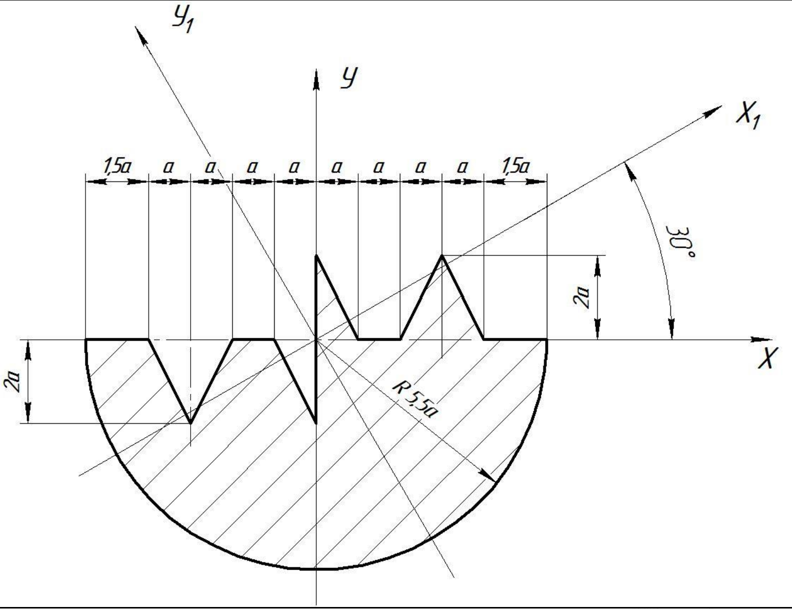
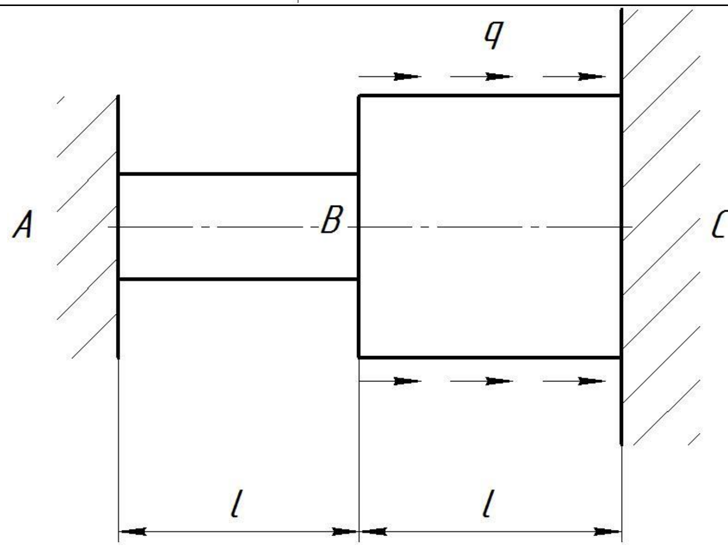
II тур Всероссийской студенческой олимпиады Цетрального и Приволжского федеральных округов по сопротивлению материалов



Задача №1

Для фигуры изображенной на рисунке определить:

1. Центробежный момент инерции относительно осей x_1y_1 ($J_{x_1y_1}$).
2. Осевой момент инерции относительно оси x_1 (J_{x_1}).



Задача №2

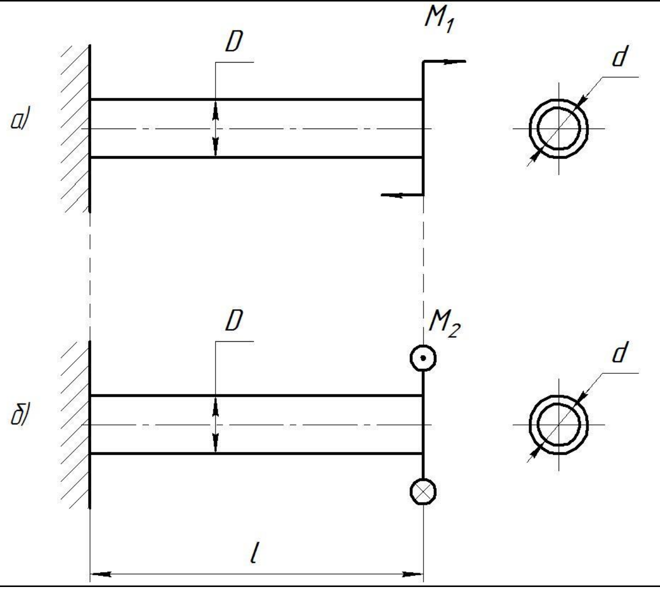
Для ступенчатого бруса определить, как и насколько градусов нужно изменить температуру стержня АС, чтобы на участке АВ напряжения стали бы равны нулю.

Известно:

$q = 20 кН/м$, $E = 2 \cdot 10^5 МПа$,

$\alpha = 12{,}5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{град}$, $l = 1м$.

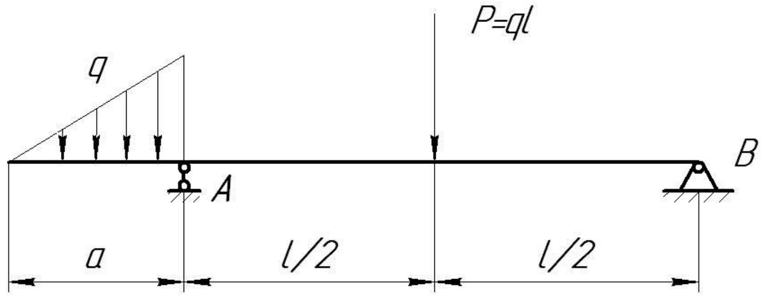
Сечение на участке АВ круг $d = 1см$, на участке ВС квадрат со стороной $a = 2см$.



Задача №3

Заданы модуль упругости материала E, коэффициент Пуассона μ, длина l, диаметры D и d.

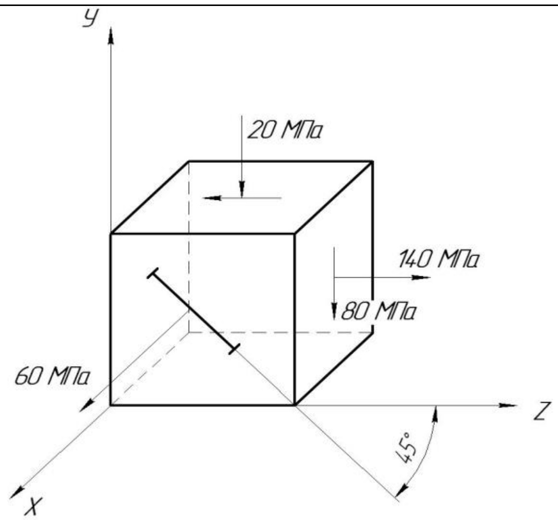
При каком отношении моментов M_1 / M_2 углы поворота концевых сечений будут одинаковыми?



Задача №4

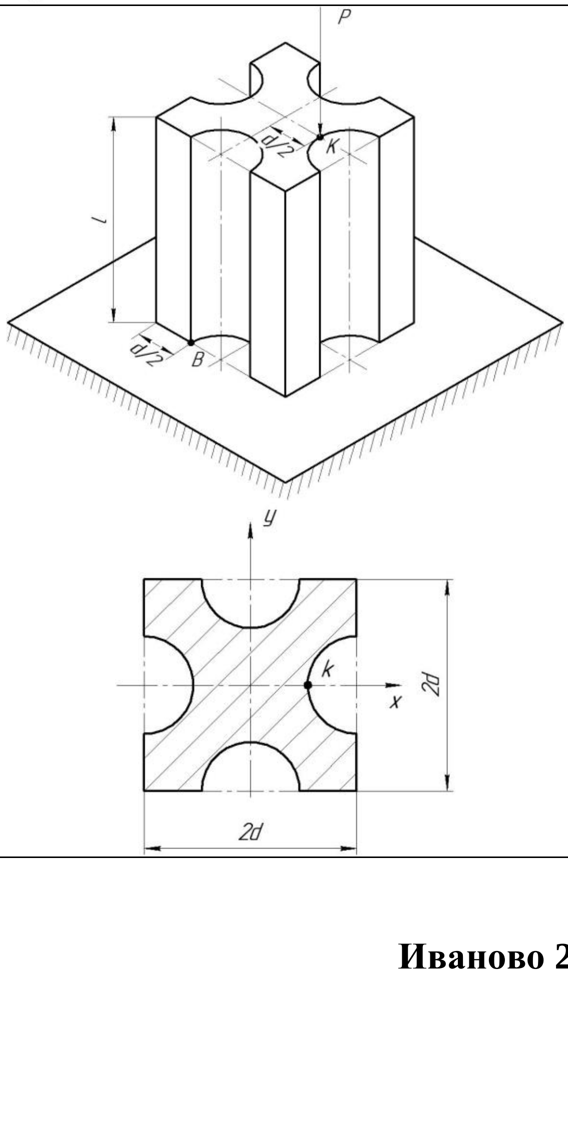
Балка постоянного поперечного сечения загружена распределенной нагрузкой меняющейся по линейному закону и сосредоточенной силой.

На каком расстоянии a необходимо расположить опору А, чтобы балка обладала бы наибольшей несущей способностью?



Задача №5

Определить относительную деформацию ε_α и величины $\sigma_{\max}$ и $\tau_{\max}$ в точке, если $E = 2 \cdot 10^{11}\,МПа$, $\mu = 0{,}25$.



Задача №6

Колонна изображенная на рисунке нагружена сосредоточенной силой P.

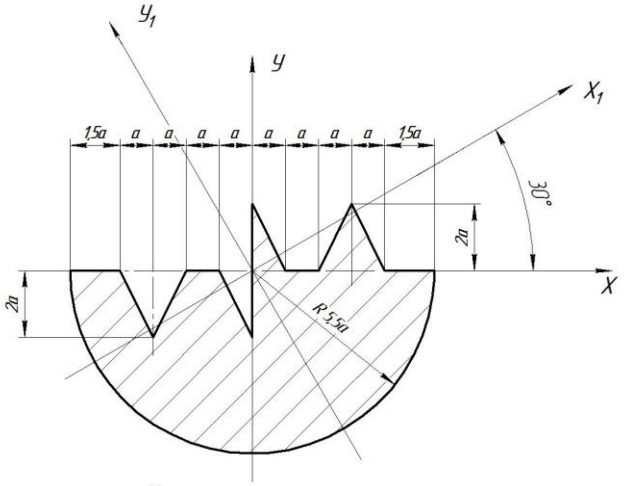
Определить величину этой силы, при условии, что нормальные напряжения в точке B равны $\sigma_B = -9МПа$, $d = 0{,}1м$.

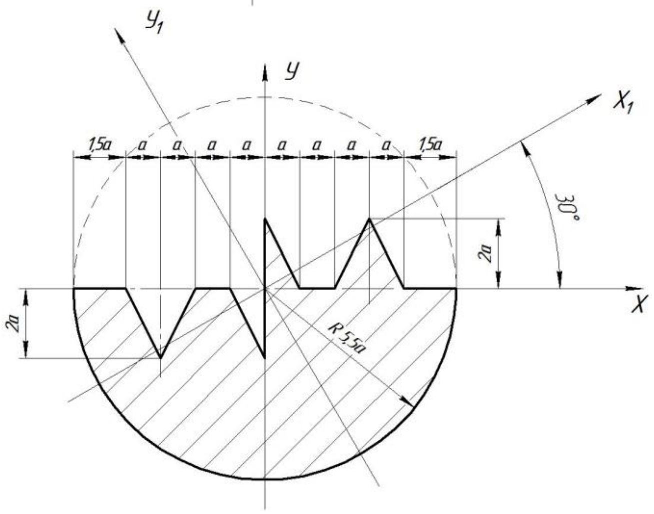
Иваново 2015

Задача №1

Для фигуры изображенной на рисунке определить:

1. Центробежный момент инерции относительно осей $x_1 y_1$ ($J_{x_1 y_1}$).
2. Осевой момент инерции относительно оси x_1 (J_{x_1}).





Решение:

Достраиваем фигуру до круга $R = 5{,}5a$.

Главные центральные оси круга *x* и *y* являются главными осями заданной фигуры.

Следовательно, центробежный момент инерции заданной фигуры относительно осей *x* и *y*: $J_{xy} = 0$

(так как оси *x* и *y* являются главными).

Круг имеет множество взаимно перпендикулярных осей симметрии, поэтому любые две взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр тяжести всего круга являются главными осями исходной фигуры, поэтому $J_{x_1 y_1} = 0$.

Осевой момент инерции фигуры относительно осей являющихся главными центральными осями круга равны половине величины моментов инерции относительно соответствующих главных центральных осей круга.

Поэтому

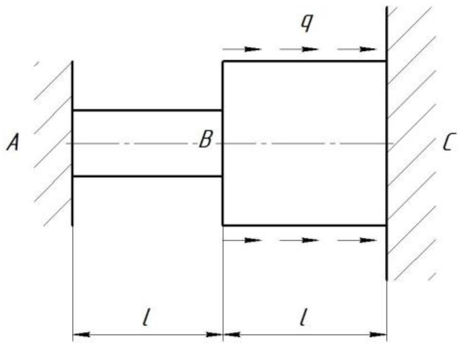
$$J_{x_1} = \frac{1}{2} J_x^{круга} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi \cdot 915{,}06 a^4}{8} = 114{,}38 \pi a^4 .$$

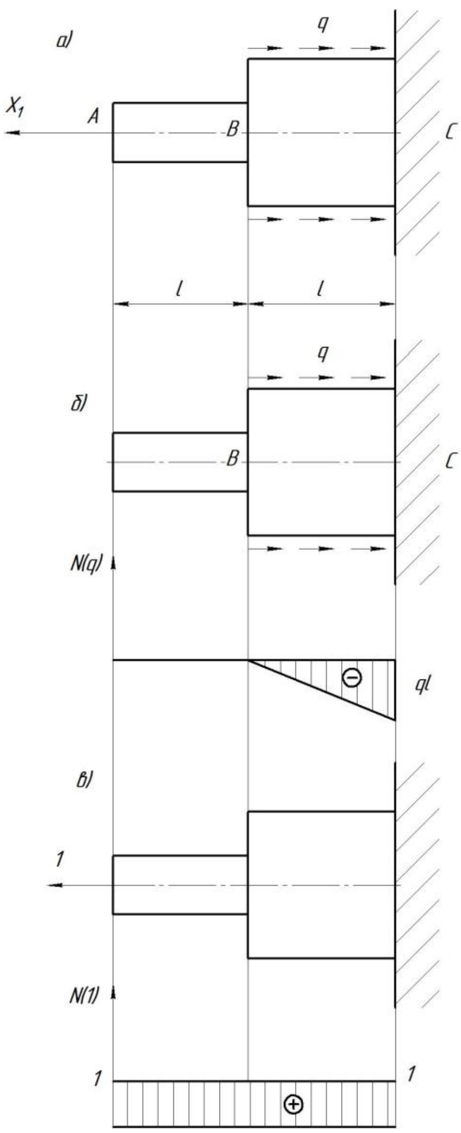
Задача №2

Для ступенчатого бруса определить, как и насколько градусов нужно изменить температуру стержня АС, чтобы на участке АВ напряжения стали бы равны нулю.

Известно: $q = 20\,кН/м$, $E = 2 \cdot 10^5\,МПа$, $\alpha = 12{,}5 \cdot 10^{-6}\,\dfrac{1}{град}$, $l = 1м$.

Сечение на участке АВ круг $d = 1см$, на участке ВС квадрат со стороной $a = 2см$.





Решение:

Применим метод сил.

Система один раз статически неопределимая.

Выберем основную систему. Тогда эквивалентная система будет иметь вид, показанный на рис. *а*.

Запишем каноническое уравнение

$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} = 0$;

В конечном состоянии системы $x_1 = 0$, поэтому уравнение примет вид:

$\Delta_{1P} + \Delta_{1t} = 0$,

где Δ_{1P} и Δ_{1t} - перемещения в направлении x_1 для основной системы соответственно при нагружении распределенной нагрузкой и нагреве стержня АС.

Для их определения строим эпюры нормальных сил при нагружении основной системы единичной силой (рис. *в*) и внешней нагрузкой q (рис. *б*).

Находим значение коэффициентов:

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EA_{BC}}\left(\frac{1}{2}ql \cdot l \cdot 1\right) = -\frac{ql^2}{2EA_{BC}},$$

где

площадь поперечного сечения на участке ВС

$A_{BC} = a^2 = \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2 = 4 \cdot 10^{-4}\,м^2$;

$\Delta_{1t} = \alpha \cdot 2l\Delta t \cdot 1$;

тогда

$$-\frac{ql^2}{2EA_{BC}} + \alpha 2l\Delta t \cdot 1 = 0,$$

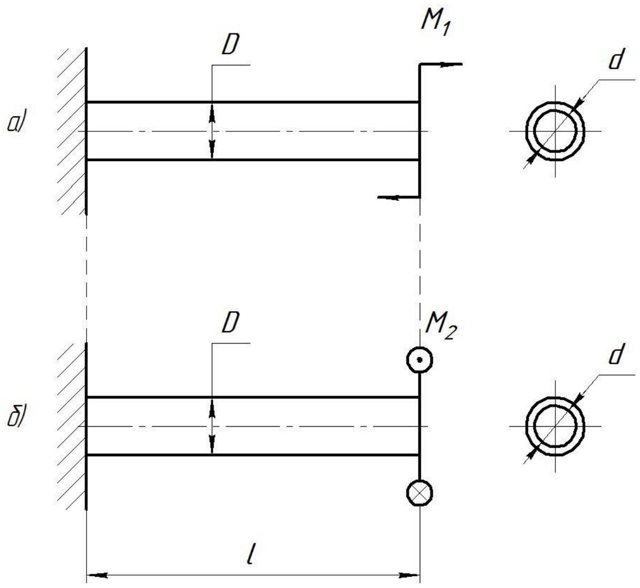
$$\Delta t = \frac{ql^2}{2EA_{BC} \cdot 2l\alpha} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 12{,}5 \cdot 10^{-6}} = 5^\circ$$

нагрев

Задача №3

Заданы модуль упругости материала E, коэффициент Пуассона μ, длина l, диаметры D и d.

При каком отношении моментов M_1 / M_2 углы поворота концевых сечений будут одинаковыми?



Решение:

На рисунке *а*) – изгиб,
при изгибе угол поворота концевого сечения $\theta = \dfrac{M_1 l}{EJ_z}$;
на рисунке *б)* – кручение,
при кручении угол поворота концевого сечения $\varphi = \dfrac{M_2 l}{GJ_p}$;
Осевой момент инерции
$J_z = \dfrac{\pi \cdot D^4}{64} - \dfrac{\pi \cdot d^4}{64} = \dfrac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$,
Полярный момент инерции
$J_p = 2J_z$,

Модуль сдвига $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$.

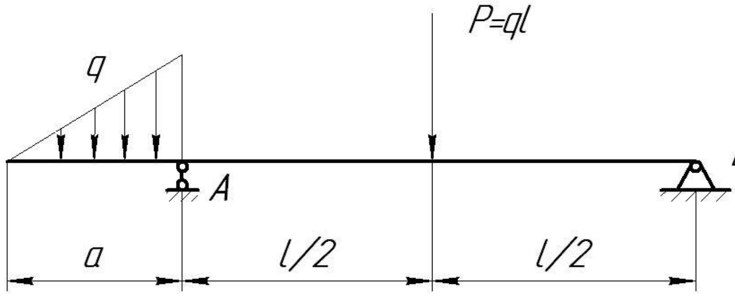
$$\theta = \varphi, \qquad \frac{M_1 l}{EJ_z} = \frac{M_2 l}{GJ_p},$$

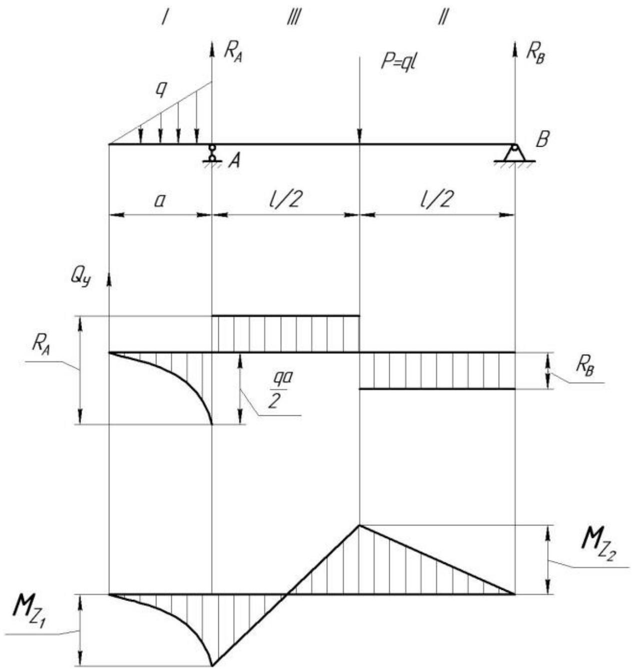
Тогда $\dfrac{M_1}{M_2} = 1 + \mu$.

Задача №4

Балка постоянного поперечного сечения загружена распределенной нагрузкой меняющейся по линейному закону и сосредоточенной силой.

На каком расстоянии a необходимо расположить опору A, чтобы балка обладала бы наибольшей несущей способностью?





Решение:

Наибольшей несущей способностью балка обладает в том случае, если

$\left|M_{z1}^{\max}\right| = \left|M_{z2}^{\max}\right|$, тогда $\sigma_{1\max} = \sigma_{2\max}$.

$$\left|M_{z1}^{\max}\right| = \left|\frac{-q(x)\cdot x}{2}\cdot\frac{1}{3}x\right| = \left|\frac{-qx^3}{6a}\right|,$$

при $x = a$, $\left|M_{z1}^{\max}\right| = \left|\frac{-qa^3}{6a}\right| = \left|\frac{-qa^2}{6}\right|$;

$\left|M_{z2}^{\max}\right| = R_B \cdot x$,

при $x = \frac{l}{2}$, $\left|M_{z2}^{\max}\right| = R_B \cdot \frac{l}{2}$.

Из уравнения равновесия

$$\sum m_A = 0,\ R_B \cdot l + \frac{1}{2}qa\cdot\frac{1}{3}a - P\cdot\frac{l}{2} = 0,$$

$$R_B = \frac{q\cdot\left(3l^2 - a^2\right)}{6l}.$$

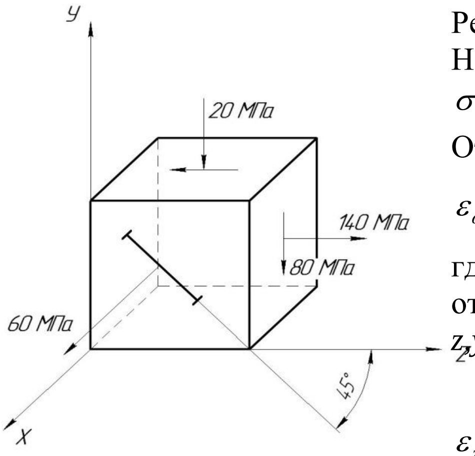
Тогда $\left|M_{z2}^{\max}\right| = \frac{q\cdot\left(3l^2 - a^2\right)}{6l}\cdot\frac{l}{2} = \frac{q\cdot\left(3l^2 - a^2\right)}{12}$.

$$\left|-\frac{qa^2}{6}\right| = \left|\frac{q\left(3l^2 - a^2\right)}{12}\right|.$$

Отсюда $a = l$.

Задача №5

Определить относительную деформацию ε_α и величины $\sigma_{\max}$ и $\tau_{\max}$ в точке, если $E = 2 \cdot 10^{11} МПа$, $\mu = 0{,}25$.



Решение:

Напряжения на площадках частицы:

$\sigma_x = 60 МПа$, $\sigma_y = -20 МПа$, $\sigma_z = 140 МПа$, $\tau_{zy} = 80 МПа$.

Относительная деформация

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_z \cdot \cos^2\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha - \frac{1}{2}\gamma_{zy} \cdot \sin 2\alpha ,$$

где

относительные линейные деформации в направлении осей z,y

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right] = \frac{10^6}{2 \cdot 10^{11}}\left[140 - 0{,}25((-20) + 60)\right] =$$

$= 65 \cdot 10^{-5}$,

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] = \frac{10^6}{2 \cdot 10^{11}}\left[-20 - 0{,}25(140 + 60)\right] = -35 \cdot 10^{-5};$$

относительный угол закручивания $\gamma_{zy} = \dfrac{\tau_{zy}}{G} = \dfrac{\tau_{zy} \cdot 2(1+\mu)}{E} = \dfrac{80 \cdot 2 \cdot (1 + 0{,}25) \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} = 100 \cdot 10^{-5}$,

тогда $\varepsilon_\alpha = 65 \cdot 10^{-5} \cdot \cos^2\left(-45^\circ\right) - 35 \cdot 10^{-5} \cdot \sin^2\left(-45^\circ\right) - \dfrac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10^{-5} \cdot \sin\left(-90^\circ\right) = 65 \cdot 10^{-5}$.

Максимальные напряжения в частице

$\sigma_{\max} = \sigma_1$ (или $|\sigma_3|$), $\tau_{\max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$,

где σ_1, σ_3 - главные напряжения.

В плоскости *zy*

$$\sigma_{1_3} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{140 + (-20)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{140 - (-20)}{2}\right)^2 + 80^2} = 60 \pm 113{,}14 МПа,$$

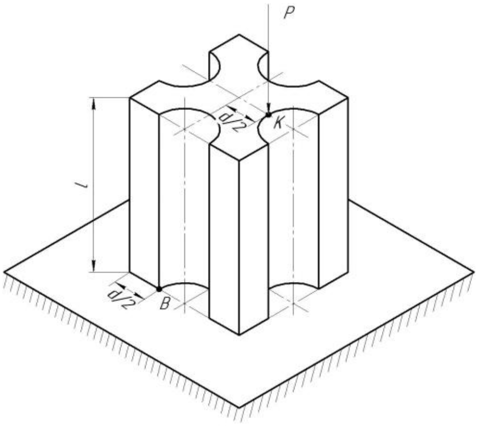
$\sigma_1 = 173{,}14 МПа$; $\sigma_3 = -53{,}14 МПа$; то есть $\sigma_{\max} = \sigma_1 = 173{,}14 МПа$.

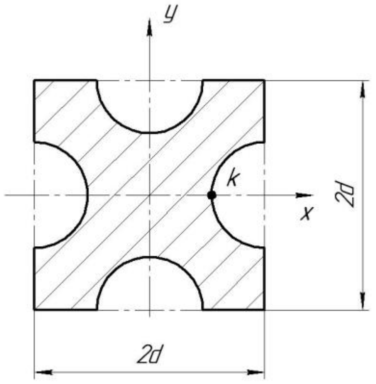
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{173{,}14 - (-53{,}14)}{2} = 113{,}14 МПа.$$

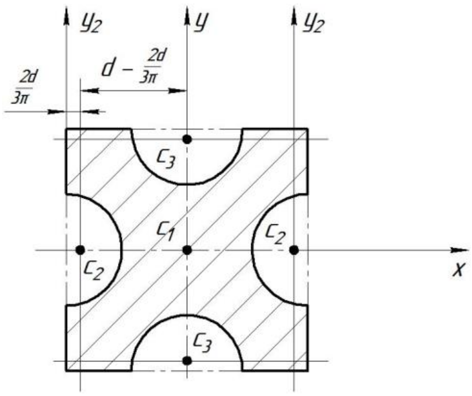
Задача 6

Колонна изображенная на рисунке нагружена сосредоточенной силой P.

Определить величину этой силы, при условии, что нормальные напряжения в точке B равны $\sigma_B = -9 МПа$, $d = 0{,}1 м$.







Решение:

Колонна испытывает внецентренное сжатие.

Нормальные напряжения в точке B

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{P \cdot x_P \cdot x}{J_y};$$

где

$$A = (2d)^2 - 2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 2{,}43 \cdot 10^{-2} м^2.$$

$$J_y = J_y^{I} - 2J_y^{II} - 2J_y^{III};$$

где

$$J_y^{I} = \frac{(2d)^4}{12} = 1{,}33 d^4,$$

$$J_y^{II} = J_{y2}^{II} + \left(d - \frac{2d}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{8} = \left(\frac{\pi \cdot d^4}{128} - \left(\frac{2d}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{8}\right) +$$

$$+ \left(d - \frac{2d}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{8} = 0{,}25 d^4,$$

$$J_y^{III} = \frac{\pi \cdot d^4}{128} = 0{,}025 d^4.$$

$$J_y = 1{,}33 d^4 - 2 \cdot 0{,}25 d^4 - 2 \cdot 0{,}025 d^4 = 0{,}78 d^4 = 0{,}78 \cdot 10^{-4} м^4$$

Тогда

$$-\frac{P}{2{,}43 \cdot 10^{-2}} - \frac{P \cdot 0{,}05 \cdot (-0{,}05)}{0{,}78 \cdot 10^{-4}} = -9 \cdot 10^6;$$

Отсюда $P = 1000 кН$.